Leçon n° 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

I/ De l'exponentielle complexe au groupe $\mathbb{U}$.

A/ Autour de l'exponentielle. [T] [ARN]

Définition 1 : $\mathbb{U}$.

Définition 2 : Exponentielle complexe.

Proposition 3 : Prop de l'exponentielle complexe et lien avec $\mathbb{U}$ sur ses props.

Proposition 4 : exp morphisme surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(C^*, \times)$ et de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 5 : Homéomorphisme surjectif de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$ et non injectif.

Proposition 6 : Formule d'Euler et de Moivre.

Proposition 7 : $\cos^2 + \sin^2 = 1$, lien géométrique entre $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $e^{i\theta}$ avec annexe.

Application 8 : Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$.

Application 9 : Polynômes de Tchébychev.

Application 10 : Calcul noyaux de Dirichlet et Féjer.

Théorème 11 : $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{U} & \to & \mathbb{C}^* \\ & & (r, e^{i\theta}) & \mapsto & re^{i\theta} \end{array}$ est un isomorphisme.

B/ Groupe des racines n-ièmes de l'unité. [PER] [ARN] [G]

Définition 12 : Racines n-ièmes.

Proposition 13 : Expression ensembliste de $\mathbb{U}_n$ et groupe cyclique d'ordre n.

Exemple 14 : Représenter graphiquement $\mathbb{U}_4$, $\mathbb{U}_5$ et $\mathbb{U}_8$.

Théorème 15 : Le seul sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$ d'ordre n est $\mathbb{U}_n$.

Définition 16 : Racines primitives n-ièmes de l'unité.

Proposition 17 : Ensemble des racines primitives n-ièmes.

Définition 18 : Indicatrice d'Euler.

Proposition 19 : $\mathbb{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathbb{U}_d^*$.

Application 20 : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Théorème 21 : [FGNAlg1] Gauss-Lucas.

Application 22 : Son application avec les racines de l'unité.

Développement 1

Lemme 23 : Déterminant circulant.

Application 24 : Suite de polygones.

II/ Notion d'angles orientés et argument.

A/ Angles orientés et argument d'un nombre complexe. [ARN] [T] [AUD]

Définition 25 : Un argument de z.

Proposition 26 : Ensemble des arguments de z.

Définition 27 : Argument principal et lien avec dét principale du logarithme.

Théorème 28 : Il n'existe pas de dét continue de l'argument sur $\mathbb{C}$.

Proposition 29 : Notion d'angle orienté de deux vecteurs unitaires.

Proposition 30 : Un argument d'un nombre complexe z est une mesure d'angle formé par $\overrightarrow{i}$ et du vecteur d'affixe $\frac{z}{|z|}$.

B/ Rotation et groupe diédral. [ROM]

Définition 31 : Rotation d'angle θ autour de 0 : $r_\theta : z \mapsto e^{i\theta} z$.

Proposition 32 : Elles laissent $\mathbb{U}$ stable.

Application 33 : Groupe diédral (groupe des isométries laissant stable le polygone régulier à n côtés).

III/ Application aux polynômes cyclotomiques.

A/ Définitions et propriétés. [PER]

Définition 34 : Polynôme cyclotomique.

Proposition 35 : $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

Exemple 36 : Calcul de Φ_3, Φ_4 et Φ_8.

Proposition 37 : $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire.

Développement 2

Théorème 38 : Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

Corollaire 39 : $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{n}}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

Application 40 : Une extension finie $\mathbb{K}$ de $\mathbb{Q}$ admet un nombre fini de racines de l'unité.

Corollaire 41 : Soit α (resp. β) une racine n (resp. m)-ième primitive de l'unité alors si $m \wedge n = 1$ alors $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

B/ Applications. [PER] [FGNAlg1]

Application 42 : Théorème de Wedderburn.

Application 43 : Théorème de Kronecker.

Corollaire 44 : Soit $P \in Z[X]$ unitaire de degré n et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Si toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1, alors $P = X$ ou $P = \Phi_n$.

Références :

- [PER] Perrin p. 80
- [ROM] Rombaldi 2nde édition p. 83
- [ARN] Arnaudiès Cours de mathématiques Tome 1 p. 247
- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 58 et p. 62
- [AUD] Audin Géométrie p. 73
- [FGNAlg1] Francinou, Gianella, Nicolas Algèbre tome 1 p. 213 et p. 229
- [G] Gourdon Algèbre p. 146